5) Vergnaud. 1990

# RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES




*ADMINISTRATION/ABONNEMENTS*
Editions LA PENSÉE SAUVAGE, B.P. 141 - F 38002 Grenoble cedex.
*Responsable de gestion :* Monique Geoffroy.




ISSN 0246 - 9367


# LA THÉORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS


Gérard Vergnaud[1]



## ABSTRACT

The aim of the «conceptual field theory» is to provide a framework for research on complex cognitive activities, mainly on learning mathematics, sciences and technology. It is a psychological theory of concepts, or better of the process of conceptualizing reality: it enables us to identify and study the continuities and discontinuities between different steps of knowledge acquisition from the point of view of their contents; it enables us also to analyse the relationship between concepts as explicit knowledge, and operational invariants as implicit components of behavior; it also enables us to analyse more deeply the relationship between signified and signifier. Examples are provided from several conceptual fields: additive structures, multiplicative structures, logic of classes, algebra.

## RESUMEN

El objetivo de la teoría de los campos conceptuales es de proporcionar un encuadre teorico a las investigaciones sobre las actividades cognitivas complejas especialmente referidas a los aprendizajes científicos y técnicos. Se trata de una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización del real, que permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos del punto de vista de su contenido conceptual. Esta teoría permite igualmente analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; ella explicita también las relaciones entre significados y significantes. Los ejemplos que la ilustran han sido tomados en diversos campos conceptuales: las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, la lógica de clases, el álgebra.

## RÉSUMÉ

L'objet de la théorie des champs conceptuels est de fournir un cadre aux recherches sur les activités cognitives complexes, principalement sur les apprentissages scientifiques et techniques. C'est une théorie psychologique du concept, ou mieux encore, de la conceptualisation du réel: elle permet de repérer et d'étudier les filiations et les ruptures entre connaissances du point de vue de leur contenu conceptuel; elle permet également d'analyser la relation entre les concepts comme connaissances explicites, et les invariants opératoires qui sont implicites dans les conduites des sujets en situation, ainsi que d'approfondir l'analyse des relations entre signifiés et signifiants. Les



1. CNRS et Université René Descartes.

exemples sont pris dans plusieurs champs conceptuels: les structures additives, les structures multiplicatives, la logique des classes, l'algèbre.



La théorie des champs conceptuels est une théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. Du fait qu'elle offre un cadre pour l'apprentissage, elle intéresse la didactique; mais elle n'est pas à elle seule une théorie didactique. Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances, chez les enfants et les adolescents, en entendant par «connaissances» aussi bien les savoir-faire que les savoirs exprimés. Les idées de filiation et de rupture concernent également les apprentissages de l'adulte, mais ces derniers s'effectuent sous des contraintes qui sont davantage de l'ordre des habitudes et des biais de pensée acquis que de l'ordre du développement de l'appareil psychique. Chez l'enfant et l'adolescent les effets de l'apprentissage et du développement cognitif interviennent toujours conjointement.

a t.c.c. é uma teoria cognitivista

objetivo da t.c.c.

La théorie des champs conceptuels n'est pas spécifique des mathématiques; mais elle a d'abord été élaborée en vue de rendre compte du processus de conceptualisation progressive des structures additives, des structures multiplicatives, des relations nombre-espace, de l'algèbre.

a t.c.c. não é específica da matemática

## CONCEPTS ET SCHÈMES

Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Ce processus d'élaboration pragmatique est essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il est d'ailleurs essentiel pour l'histoire des sciences. Parler d'élaboration pragmatique ne préjuge nullement de la nature des problèmes auxquels un concept nouveau apporte une réponse: ces problèmes peuvent être théoriques autant que pratiques. Cela ne préjuge pas non plus de l'analyse du rôle du langage et du symbolisme dans la conceptualisation; ce rôle est très important. Simplement, si l'on veut prendre correctement la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend

é através de situações e problemas a resolver que um conceito adquire sentido dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas.

On peut distinguer:

1) des classes de situations pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire, à un moment donné de son développement et sous certaines circonstances, des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation;

2) des classes de situations pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires, ce qui l'oblige à un temps de réflexion et d'exploration, à des hésitations, à des tentatives avortées, et le conduit éventuellement à la réussite, éventuellement à l'échec.

Le concept de «schème» est intéressant pour l'une et l'autre classes de situations, mais il ne fonctionne pas de la même manière dans les deux cas. Dans le premier cas on va observer pour une même classe de situations, des conduites largement automatisées, organisées par un schème unique; dans le second cas, on va observer l'amorçage successif de plusieurs schèmes, qui peuvent entrer en compétition et qui, pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinés; ce processus s'accompagne nécessairement de découvertes.

chème

Appelons «schème» *l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée.* C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire.

Prenons un premier exemple dans le domaine de la motricité: le schème qui organise le mouvement du corps de l'athlète au moment du saut en hauteur représente un ensemble impressionnant de connaissances spatiales et mécaniques. La conduite du sauteur a beau subir certaines variations, l'analyse de ses essais successifs met en évidence de nombreux éléments communs. Ces éléments communs concernent bien entendu, le décours temporel de la mobilisation des muscles qui contribuent à assurer l'efficacité des différentes phases du mouvement; mais cette organisation motrice repose sur une certaine perception des rapports des objets dans l'espace et notamment du rapport des différentes parties du corps avec cet espace au cours du mouvement. Cette organisation perceptivo-motrice suppose donc des catégories d'ordre spatial, temporel, et mécanique



(orientations dans l'espace, distance minimum, succession et durée, force, accélération et vitesse...) ainsi que des connaissances-en-acte qui pourraient prendre la forme de théorèmes de géométrie et de mécanique, s'ils étaient explicités. Cette explicitation est d'ailleurs l'un des enjeux de l'entraînement et de l'analyse du mouvement: elle est favorisée par les techniques vidéo et par la compétence professionnelle des entraîneurs; elle demeure cependant très fragmentaire.

Les compétences mathématiques sont elles-mêmes sous-tendues par des schèmes organisateurs de la conduite. Prenons quelques exemples élémentaires:

— le schème du dénombrement d'une petite collection par un enfant de 5 ans a beau varier dans ses formes lorsqu'il s'agit de compter des bonbons, des assiettes sur une table, ou les personnes assises de manière éparse dans un jardin, il n'en comporte pas moins une organisation invariante, essentielle pour le fonctionnement du schème: coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets, énoncé coordonné de la suite numérique, cardinalisation de l'ensemble dénombré par soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé: un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept... sept!

— le schème de résolution des équations de la forme $ax + b = c$ atteint rapidement un degré élevé de disponibilité et de fiabilité chez les élèves de cinquième et de quatrième, débutant en algèbre, lorsque a, b et c ont des valeurs numériques positives et que $b < c$ (ce n'est pas tout à fait le cas lorsque certains des paramètres a, b, c et $c - b$ sont négatifs). La suite des écritures effectuées par les élèves montre clairement une organisation invariante, qui repose à la fois sur des habitudes apprises et sur des théorèmes comme les suivants:

«on conserve l'égalité en soustrayant b des deux côtés»

«on conserve l'égalité en divisant par a des deux côtés».

Le fonctionnement cognitif de l'élève comporte des opérations qui s'automatisent progressivement (changer de signe quand on change de membre, isoler x d'un côté du signe d'égalité) et des décisions conscientes qui permettent de tenir compte des valeurs particulières des variables de situation. La fiabilité du schème pour le sujet repose en dernier ressort sur la connaissance qu'il a, explicite ou implicite, des relations entre l'algorithme et les caractéristiques du problème à résoudre.

L'automatisation est évidemment l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action. Mais une suite de décisions conscientes peut aussi faire l'objet d'une organisation invariante pour une classe de situations données. D'ailleurs l'automatisation n'empêche pas que le sujet conserve le contrôle des conditions sous lesquelles telle opération est appropriée ou non. Prenons, par exemple, l'algorithme de l'addition en numération décimale; son exécution est largement automatisée pour la plupart des enfants à la fin de l'école élémentaire. Pourtant les enfants sont capables de générer une suite d'actions différentes en fonction des caractéristiques de la situation: retenue ou pas, zéro intercalaire ou pas, décimal ou pas. En fait toutes nos conduites comportent une part d'automaticité et une part de décision consciente.

todas as condutas têm uma parte automatizada e uma parte de decisão consciente

On voit aussi avec ces exemples, que les algorithmes sont des schèmes, ou encore que les schèmes sont des objets du même type logique que les algorithmes: il leur manque éventuellement l'effectivité, c'est-à-dire la propriété d'aboutir à coup sûr en un nombre fini de pas. Les schèmes sont souvent efficaces, pas toujours effectifs. Lorsqu'un enfant utilise un schème inefficace pour une certaine situation, l'expérience le conduit soit à changer de schème, soit à modifier ce schème. Avec Piaget, on peut dire que ce sont les schèmes qui sont au centre du processus d'adaptation des structures cognitives: assimilation et accommodation.

Piaget

Reprenons l'exemple de l'algorithme de l'addition des nombres entiers. On le présente le plus souvent comme un ensemble de règles:

— commencer par la colonne des unités, la plus à droite;
— continuer par la colonne des dizaines, puis des centaines, etc.
— calculer la somme des nombres dans chaque colonne. Si la somme des nombres dans une colonne est inférieure à dix, inscrire cette somme sur la ligne du total (ligne du bas). Si elle est égale ou supérieure à dix, écrire seulement le chiffre des unités de cette somme et retenir le chiffre des dizaines, que l'on reporte en haut de la colonne immédiatement située à gauche, pour l'ajouter aux autres nombres de cette dernière colonne,
— et ainsi de suite en progressant de droite à gauche, jusqu'à épuisement des colonnes.



Expliciter ces règles est difficile et quasiment impossible pour les enfants, alors même qu'ils sont capables d'exécuter la suite des opérations. Il y a toujours beaucoup d'implicite dans les schèmes.

há muito de implícito nos esquemas

Il faut observer en outre que, sans la numération de position et la conceptualisation qui lui est associée (décomposition polynomiale des nombres), le schème-algorithme ne peut pas fonctionner: on le voit bien chez les élèves en échec, qui ne savent pas composer entre elles des informations données en termes de dizaines, de centaines, de milliers. Un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite. Considérons les erreurs des élèves dans les opérations de soustraction: on s'aperçoit que les plus fréquentes d'entre elles (omettre la retenue, soustraire le nombre le plus petit du plus grand dans chaque colonne indépendamment de sa position en bas ou en haut) tiennent à une conceptualisation insuffisante de la notation décimale. Il peut certes y avoir des ratés dans l'exécution automatisée d'un schème, mais ce ne sont pas ces ratés qui rendent compte des principales erreurs.

Dans le cas du dénombrement, on peut identifier aisément deux idées mathématiques indispensables au fonctionnement du schème: celles de bijection et de cardinal, sans lesquelles en effet, il n'y a pas de conduite de dénombrement possible. C'est d'ailleurs sur ces deux points qu'on observe des erreurs: certains enfants ne parviennent pas à «cardinaliser», c'est-à-dire à se représenter le dernier mot-nombre prononcé comme représentant la mesure de tout l'ensemble, d'autres enfants (éventuellement les mêmes) omettent des éléments, ou recomptent deux fois le même élément. De manière analogue, il n'y a pas d'algèbre vraiment opératoire sans la reconnaissance des théorèmes concernant la conservation de l'égalité. Ce ne sont pas les seuls éléments cognitifs utiles mais ils sont décisifs.

On désigne par les expressions «concept-en-acte» et «théorème-en-acte» les connaissances contenues dans les schèmes: on peut aussi les désigner par l'expression plus globale d'«invariants opératoires».

invariantes operatórios

Tel que nous venons de le définir, le concept de schème s'applique facilement à la première catégorie de situations vues plus haut, celles pour lesquelles le sujet dispose des compétences nécessaires, et moins à la seconde catégorie puisque le sujet hésite et tente plusieurs approches. Pourtant l'observation des élèves en situation de résolution de problème, l'analyse de leurs hésitations et de leurs erreurs, montrent que les conduites en situation ouverte sont également structurées par des schèmes. Ceux-ci sont empruntés au vaste répertoire des schèmes disponibles, et notamment à ceux qui sont associés aux classes de situations qui paraissent avoir une parenté avec la situation actuellement traitée. Simplement comme la parenté n'est que partielle et éventuellement illusoire, les schèmes sont seulement esquissés, et les tentatives souvent interrompues avant d'avoir été menées à leur terme; plusieurs schèmes peuvent être évoqués successivement, et même simultanément dans une situation nouvelle pour le sujet (ou considérée par lui comme nouvelle). A titre d'illustration, prenons le cas d'une situation dans laquelle un groupe d'enfants de cinquième avait à comparer le volume d'un objet solide plein et celui d'un récipient (situation nouvelle pour eux). Le premier schème mobilisé fut celui de la comparaison des hauteurs, comme s'il s'était agi de comparer la quantité de jus d'orange dans deux vases de même forme: cette action de comparaison des niveaux ne donna lieu à aucune conclusion. Le deuxième schème observé fut celui de l'immersion (partielle) de l'objet plein dans le récipient: évidemment comme le récipient était lui-même plein, l'eau déborda; la conclusion de l'élève fut alors que l'objet plein était plus gros! C'est seulement ensuite que d'autres actions, plus opératoires, furent engagées jusqu'à ce qu'une procédure véritablement «décidable» permette de trancher. Ainsi plusieurs schèmes, apparentés mais non pertinents, avaient été évoqués avant qu'une solution émerge.

muitos esquemas podem ser evocados sucessivamente

Cet exemple illustre l'idée que le fonctionnement cognitif d'un sujet ou d'un groupe de sujets en situation repose sur le répertoire des schèmes disponibles, antérieurement formés, de chacun des sujets pris individuellement. En même temps les enfants découvrent de nouveaux aspects, et éventuellement de nouveaux schèmes, en situation. Comme les conduites en situation reposent sur le répertoire initial des schèmes disponibles, on ne peut théoriser valablement sur le fonctionnement cognitif en faisant l'impasse sur le développement cognitif. La théorie des champs conceptuels s'adresse à ce problème critique.

as condutas em situações repousam sobre o repertório inicial de esquemas disponível

Il existe de nombreux exemples de schèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Chaque schème est relatif à une classe de situations dont les caractéristiques sont bien définies.



Toutefois il peut être appliqué par un sujet individuel à une classe plus étroite que celle à laquelle il pourrait en fait être appliqué efficacement. Se pose alors un problème d'extension du schème à une classe plus large: on peut parler alors de délocalisation, de généralisation, de transfert, de décontextualisation. On ne peut imaginer qu'un tel processus intervienne sans que soient reconnues par le sujet des analogies et parentés (ressemblances sur certains critères, différences sur d'autres) entre la classe de situations sur laquelle le schème était déjà opératoire pour le sujet, et les situations nouvelles à conquérir. La reconnaissance d'invariants est donc la clef de la généralisation du schème.

Mais un schème peut aussi être appliqué par un sujet individuel à une classe trop large: il est alors mis en défaut et le sujet doit en restreindre la portée, et décomposer le schème en éléments distincts susceptibles d'être recomposés de manière différente pour les diverses sous-classes de situations, éventuellement par adjonction d'éléments cognitifs supplémentaires. On reconnaît là des processus de restriction et d'accommodation. Par exemple s'il faut compter un ensemble de plusieurs centaines d'éléments, le schème du dénombrement va devoir être enrichi de procédures de regroupements, de dénombrements partiels, d'additions; ou bien dans l'exemple de l'algèbre, si les valeurs de a, b et c sortent des conditions vues plus haut (c - b négatif par exemple), la résolution des équations de type $ax + b = c$ va appeler des aménagements importants du schème initial.

Dans la résolution des problèmes d'arithmétique dite élémentaire, les enfants rencontrent de nombreuses difficultés conceptuelles. C'est en termes de schèmes qu'il faut analyser le choix des bonnes opérations et des bonnes données pour résoudre un problème dans lequel il existe plusieurs possibilités de choix. La prise d'information dans la lecture de l'énoncé, la prise d'informations physiques (mesures par exemple), la recherche d'informations dans une documentation (dans un livret scolaire, dans des tableaux statistiques etc.), la combinaison adéquate de ces informations par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, obéissent en général à des schèmes, notamment chez les élèves qui maîtrisent ces situations. Pour les autres élèves, il s'agit de résolution de problème, parce que les situations en jeu ne sont pas encore devenues triviales pour eux; mais les procédures heuristiques sont des schèmes: elles ne sont ni effectives comme les algorithmes, ni même efficaces parfois.

esquema

Le schème, totalité dynamique organisatrice de l'action du sujet pour une classe de situations spécifiée, est donc un concept fondamental de la psychologie cognitive et de la didactique. Il n'est pas souvent reconnu comme tel. En outre, il demande à être analysé. Si on reconnaît facilement qu'un schème est composé de règles d'actions et d'anticipations puisqu'il génère une suite d'actions en vue d'atteindre un certain but, on ne reconnaît pas toujours qu'il est également composé, de manière essentielle, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et connaissances-en-acte) et d'inférences. Les inférences sont indispensables à la mise en œuvre du schème dans chaque situation particulière, hic et nunc: en effet, comme nous l'avons vu, un schème n'est pas un stéréotype mais une fonction temporalisée à arguments, qui permet de générer des suites différentes d'actions et de prises d'information en fonction des valeurs des variables de situation. Un schème est toujours un universel puisqu'il est associé à une classe, et qu'en outre cette classe n'est pas en général finie.

componentes de um esquema

Quant aux invariants opératoires, ils méritent une explication complémentaire car il en existe fondamentalement de trois types logiques:

— *des invariants de type «propositions»*: ils sont susceptibles d'êtres vrais ou faux; les théorèmes-en-acte sont des invariants de ce type.

1[er] exemple: entre 5 et 7 ans, les enfants découvrent qu'il n'est pas nécessaire de recompter le tout pour trouver le cardinal de $A \cup B$ si l'on a déjà compté A et compté B. On peut exprimer cette connaissance par un théorème-en-acte:

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \quad \text{pourvu que } A \cap B = \emptyset$$

L'absence de quantificateur laisse entendre que ce théorème n'a pas une validité universelle pour les enfants, mais une portée seulement locale, pour les petites collections par exemple.

2[ème] exemple: entre 8 et 10 ans, avec un bonheur variable selon les individus, beaucoup d'élèves comprennent que si une quantité d'objets marchands est multipliée par 2, 3, 4, 5, 10, 100 ou un nombre simple, alors le prix est 2, 3, 4, 5, 10, 100 fois plus



grand. On peut exprimer cette connaissance par un théorème-en-acte

$f(nx) = nf(x)$ pour n entier et simple

— *des invariants de type «fonction propositionnelle»*: ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Par exemple Les concepts de cardinal et de collection, ceux d'état initial, de transformation et de relation quantifiée, sont indispensables à la conceptualisation des structures additives. Ce ne sont pas des propositions.

conceitos em ação

Ces concepts sont rarement explicités par les élèves alors même qu'ils sont construits par eux dans l'action: ce sont des concepts-en-acte, ou des catégories-en-acte. Le type logique des concepts-en-acte est différent du type logique des théorèmes-en-acte: ce sont des fonctions propositionnelles. La relation entre fonctions propositionnelles et propositions est une relation dialectique: il n'y a pas de proposition sans fonctions propositionnelles et pas de fonction propositionnelle sans propositions. De la même manière concepts-en-acte et théorèmes-en-acte se construisent en étroite interaction.

Parmi les fonctions propositionnelles, il faut considérer qu'il existe des fonctions à un argument (les propriétés), des fonctions à deux arguments (les relations binaires), des fonctions à trois arguments (les relations ternaires, parmi lesquelles les lois de composition binaires), des fonctions à quatre arguments, comme dans la proportionnalité, et des fonctions à plus de quatre arguments.

On peut ainsi écrire $P(x)$ la fonction propositionnelle «...est bleu», $R_2(x, y)$ la relation «...est à droite de...», $R_3(x, y, z)$ la relation «...est entre... et...» ou la loi de composition «la somme de... et... est...».

Cette distinction entre propositions et fonctions propositionnelles est indispensable. Pourtant elle ne rend pas compte à elle seule de tous les aspects importants du processus de conceptualisation. Les concepts de couleur, de direction et de sens sont à l'évidence d'un autre type logique que les concepts de bleu et de droite. On peut considérer par exemple que l'ensemble des couleurs est l'ensemble-quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence «à la même couleur que». Il faut alors considérer que le concept de couleur procède de la construction d'un descripteur par mise en relation des valeurs particulières qu'il peut prendre. Une analyse encore plus complexe est nécessaire pour les concepts de chaleur, de force, de fonction, de variable? Il y a là une voie de recherche théorique très importante.

— *des invariants de type «argument»*: qui dit fonction propositionnelle et proposition dit argument. Les logiciens classiques avaient l'habitude de prendre leurs exemples dans les objets matériels ordinaires et leurs propriétés. Etaient alors arguments a, b, c (instanciations des variables x, y, z), des objets matériels comme le livre, la table, le personnage Paul; et fonctions propositionnelles des propriétés et des relations P, $R_2$, $R_3$ comme celles que nous avons vues plus haut. Par exemple, «Paul pose le livre sur la table» peut s'écrire: $R_3$ (Paul, livre, table), proposition qui résulte de l'instanciation des arguments de la fonction propositionnelle $R_3$ (x, y, z) «x pose y sur z» dans laquelle x est une personne, y un petit objet matériel manipulable et z un support possible.

En mathématiques, les arguments peuvent être des objets matériels (le bateau est à droite du phare), des personnages (Paul est plus grand que Céline), des nombres (4 + 3 = 7), des relations («plus grand que» est une relation antisymétrique), et même des propositions («8 est un diviseur de 24» est la réciproque de «24 est un multiple de 8»).

conceito transform. x conceito objeto

Ces distinctions sont indispensables pour la didactique parce que la transformation des concepts-outils en concepts-objets est un processus décisif dans la conceptualisation du réel. Cette transformation signifie entre autres choses que les fonctions propositionnelles peuvent devenir arguments. La nominalisation est une opération linguistique essentielle dans cette transformation.

Cette parenthèse sur les propositions et les fonctions propositionnelles peut paraître paradoxale dans un paragraphe consacré principalement aux invariants opératoires contenus dans les schèmes. La première raison de cette clarification est que les invariants opératoires ne sont pas d'un type logique unique et qu'il faut donc analyser le statut de chacun. La seconde raison est qu'un concept-en-acte n'est pas tout à fait un concept, ni un théorème-en- acte un théorème. Dans la science, concepts et théorèmes sont explicites et l'on peut discuter de leur pertinence et de leur vérité. Ce n'est pas nécessairement le cas pour les

conceito-ato não é conceito; teorema-em-ato não é um teorema. conceitos e teoremas são explícitos



os meios do que a parte visível da ... conceitualizações

invariants opératoires. Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation: sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite: propositions, fonctions propositionnelles, objets-arguments.

En résumé, l'opérationalité d'un concept doit être éprouvée à travers des situations variées, et le chercheur doit analyser une grande variété de conduites et de schèmes pour comprendre en quoi consiste, du point de vue cognitif, tel ou tel concept: par exemple le concept de rapport ne se comprend qu'à travers une diversité de problèmes pratiques et théoriques; de même les concepts de fonction ou de nombre. Chacun de ces concepts comporte en effet plusieurs propriétés, dont la pertinence est variable selon les situations à traiter. Certaines peuvent être comprises très tôt, d'autres beaucoup plus tard au cours de l'apprentissage. Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques, conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations.

formação de conceitos

conceito como conjunto de invariantes utilizáveis na ação

Toutefois l'action opératoire n'est pas le tout de la conceptualisation du réel, loin de là. On ne débat pas de la vérité ou de la fausseté d'un énoncé totalement implicite, et on n'identifie pas les aspects du réel auxquels il faut prêter attention, sans l'aide de mots, d'énoncés, de symboles et de signes. L'usage de signifiants explicites est indispensable à la conceptualisation.

C'est ce qui conduit à considérer qu'un concept est un triplet de trois ensembles:

$C = (S, I, \mathcal{S})$

S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I: l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationalité des schèmes (le signifié)

$\mathcal{S}$: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

conceito como um triplete de conjuntos

Conceitos

Etudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois. Il n'y a pas en général de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations.

o campo conceitual das estruturas aditivas

## CHAMPS CONCEPTUELS

campo conceitual como um conjunto de situações

Considérons en premier lieu un champ conceptuel comme un ensemble de situations. Par exemple, pour le champ conceptuel des structures additives, l'ensemble des situations qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations; et pour les structures multiplicatives, l'ensemble des situations qui demandent une multiplication, une division ou une combinaison de telles opérations. Le premier avantage de cette approche par les situations est de permettre de générer une classification reposant sur l'analyse des tâches cognitives et des procédures pouvant être mises en jeu dans chacune d'entre elles.

situação

Le concept de situation n'a pas ici le sens de situation didactique mais plutôt celui de tâche, l'idée étant que toute situation complexe peut être analysée comme une combinaison de tâches dont il est important de connaître la nature et la difficulté propres. La difficulté d'une tâche n'est ni la somme ni le produit de la difficulté des différentes sous-tâches, mais il est clair que l'échec dans une sous-tâche entraîne l'échec global.

modelos

Certains chercheurs privilégient, pour cette analyse, des modèles de la complexité relevant soit de la linguistique, soit des théories du traitement de l'information. La théorie des champs conceptuels privilégie au contraire des modèles qui donnent un rôle essentiel aux concepts mathématiques eux-mêmes. Certes la forme des énoncés et le nombre d'éléments mis en jeu sont des facteurs pertinents de la complexité, mais leur rôle est subordonné.

La logique non plus n'est pas un cadre suffisamment opératoire pour rendre compte de la complexité relative des tâches et sous-tâches, des procédures, des représentations symboliques. Elle est trop réductrice et met sur le même plan des objets mathématiques qui, tout en ayant éventuellement le même statut



C.C. como uma psicologia de conceitos

logique (prédicat du premier ordre, classe de fonctions propositionnelles d'un certain type, loi de composition...) ne soulèvent pas les mêmes problèmes de conceptualisation. Par rapport à une psychologie cognitive centrée sur les structures logiques, comme celle de Piaget, la théorie des champs conceptuels apparaît plutôt comme une psychologie des concepts, même lorsque le terme «structures» intervient dans la désignation même du champ conceptuel considéré: structures additives, structures multiplicatives. En effet, si la première entrée d'un champ conceptuel est celle des situations, on peut aussi identifier une deuxième entrée, celle des concepts et des théorèmes.

situações como primeira entrada de um c.c.

conceitos e teoremas como segunda

Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques. Sont ainsi constitutifs des structures additives, les concepts de cardinal et de mesure, de transformation temporelle par augmentation ou diminution (perdre ou dépenser 5 francs), de relation de comparaison quantifiée (avoir 3 bonbons ou 3 ans de plus que), de composition binaire de mesures (combien en tout?), de composition de transformations et de relations, d'opération unaire, d'inversion, de nombre naturel et de nombre relatif, d'abscisse, de déplacement orienté et quantifié...

Ces concepts ne vont pas seuls: ils n'auraient guère de portée si des théorèmes vrais ne leur donnaient leur fonction, dans le traitement des situations:

$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$ pourvu que $A \cap B = \emptyset$

$F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$
pour S = état initial, T = transformation, F = état final

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (Relation de Chasles) $\Rightarrow$ $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$
quelle que soit la position respective de A, B et C.
etc.

o campo conceitual das estruturas multiplicativas

De manière analogue, le champ conceptuel des structures multiplicatives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations: proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire direct et in-

verse, quotient et produit de dimensions, combinaison linéaire et application linéaire, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc. Parmi les théorèmes qui donnent leur fonction à ces concepts, il faut mentionner:
les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire
$f(nx) = nf(x)$
$f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) + n_2f(x_2)$
et leur généralisation à des rapports non entiers
les propriétés concernant le coefficient constant entre deux variables linéairement liées
$f(x) = ax \qquad x = \frac{1}{a} f(x)$
et certaines propriétés spécifiques de la bilinéarité
$f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1.n_2\, f(x_1, x_2)$

Il y en a plusieurs autres, et l'élaboration pragmatique du champ conceptuel des structures multiplicatives passe ainsi par des étapes qu'il est possible d'identifier clairement.

Mais la portée du cadre théorique des champs conceptuels resterait limitée si elle s'arrêtait à ces deux exemples, aussi je mentionnerai plusieurs autres domaines pour montrer qu'il s'agit d'un cadre relativement général:

e.e. da eletricidade

— L'électricité, et les schèmes qui organisent l'activité du sujet dans ce domaine. Les situations à comprendre et à traiter sont différentes: l'éclairage d'une pièce, le branchement d'une lampe sur une pile (deux pôles, deux fils, existence d'un courant), la compréhension du circuit électrique d'une habitation ou d'une voiture, l'analyse et la dissociation des concepts d'intensité, de tension, de résistance et d'énergie pour les calculs d'électrocinétique etc.;
— la mécanique, qui implique également une grande variété de situations et de concepts;
— les grandeurs spatiales (longueurs, surfaces, volumes), dont la conceptualisation fait appel à la fois à la géométrie, aux structures additives et aux structures multiplicatives;
— la logique des classes, qui constitue le savoir de référence pour la compréhension des concepts de propriété et de caractéristique, de la relation d'inclusion, des opérations d'intersection, d'union, de complémentation sur les classes et des opérations de conjonction, de disjonction et de négation sur les propriétés. On peut regretter que les psychologues aient accordé une attention excessive aux problèmes de classification et de catégorisation, ou que les réformateurs du mouvement des «maths modernes», soient tombés comme des néophytes dans la religion de la logique des classes; mais il faut aussi reconnaître que ce champ conceptuel recouvre des questions sérieuses pour le développement et l'apprentissage de la rationalité. La logique des classes présente d'ailleurs de l'intérêt non seulement pour le calcul des classes et des propriétés, mais aussi pour les relations entre opérations sur les classes et opérations sur les nombres. A côté des lois de Morgan, purement logiques:



$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$
$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ $\qquad \overline{X}$ = complément de X

On peut en effet considérer les théorèmes qui portent sur les correspondances entre classes et cardinaux, par exemple la quantification de l'inclusion:
$A \subset B \Rightarrow \mathrm{Card}\,(A) \leqslant \mathrm{Card}\,(B)$
ou encore le théorème des cardinaux:
$\mathrm{Card}\,(A \cup B) + \mathrm{Card}\,(A \cap B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$

Ce dernier théorème n'est pas trivial. Pourtant certains élèves de CM2 sont capables de calculer Card $(A \cup B)$ connaissant les trois autres cardinaux; ou Card (A), ou encore Card $(A \cap B)$; cette dernière tâche est la plus difficile des trois. On retrouve pour la logique des classes la question déjà soulevée plus haut des connaissances non explicites susceptibles d'orienter une démarche de résolution. Les schèmes nécessaires à la résolution des derniers problèmes que nous venons d'évoquer participent à la fois de la logique des classes et des structures additives.

## SITUATIONS

Le concept de situation a été beaucoup renouvelé par Guy Brousseau, qui lui a donné non seulement une portée didactique qu'il n'avait pas en psychologie, mais aussi une signification dans laquelle la dimension affective et dramatique intervient autant que la dimension cognitive. La mise en scène des concepts et des procédures mathématiques est un art qui s'alimente aussi bien à la psychologie sociale qu'à l'épistémologie et à la psychologie des mathématiques.

Nous ne prendrons pas le concept de «situation» avec toute cette signification ici; nous nous limiterons au sens que lui donne habituellement le psychologue: les processus cognitifs et les réponses du sujet sont fonction des situations auxquelles ils sont confrontés. Et nous retiendrons deux idées principales:

situação

1) celle de variété: il existe une grande variété de situations dans un champ conceptuel donné, et les variables de situation sont un moyen de générer de manière systématique l'ensemble des classes possibles;

variedade

2) celle d'histoire: les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner.

histórico

La combinaison de ces deux idées ne rend pas nécessairement aisé le travail du chercheur en didactique, car la première idée l'oriente vers l'analyse, la décomposition en éléments simples et la combinatoire des possibles, alors que la seconde l'oriente vers la recherche des situations fonctionnelles, presque toujours composées de plusieurs relations, et dont l'importance relative est largement liée à la fréquence avec laquelle on les rencontre.

pesquisa

Prenons des exemples: acheter des gâteaux, des fruits ou des bonbons, mettre la table, compter les personnes, les couverts, jouer aux billes, sont pour un enfant de 6 ans, des activités favorables au développement des conceptualisations mathématiques concernant le nombre, la comparaison, l'addition et la soustraction. Toutefois, dans la plupart de ces activités, la vie n'offre qu'un petit nombre de cas parmi les problèmes possibles; par exemple, concernant l'activité d'achat:

— Ai-je assez d'argent pour acheter ça? pour acheter à la fois ceci et cela?

— Combien me restera-t-il si j'achète ça?

— Combien me manque-t-il?

— Vaut-il mieux acheter ceci ou cela? Quelle est la différence de prix?

En outre, dans les situations habituelles de vie, les données pertinentes sont immergées dans un ensemble d'informations peu ou pas pertinentes, sans que soient toujours clairement exprimées les questions qu'on peut se poser. De telle sorte que le traitement de ces situations suppose à la fois l'identification des questions et celle des opérations à faire pour y répondre. Cela invite à l'analyse, mais il n'est pas aisé de partir des situations de la vie pour établir une classification systématique.

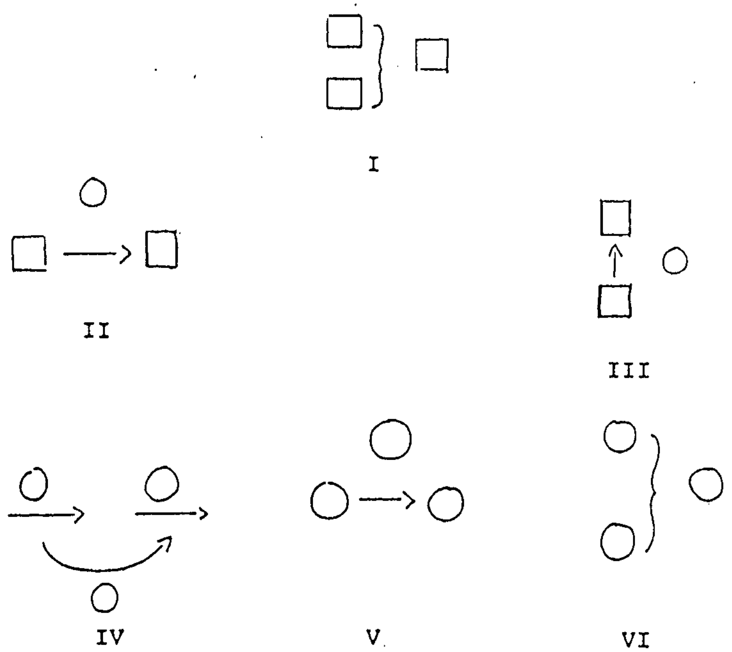


En principe pourtant, toute situation peut être ramenée à une combinaison de relations de base avec des données connues et des inconnues, lesquelles correspondent à autant de questions possibles. La classification de ces relations de base et des classes de problèmes qu'on peut générer à partir d'elles est un travail scientifique indispensable. Aucune science ne s'est constituée sans un travail de classification systématique. Cette classification permet en outre d'ouvrir le champ des possibles, et de dépasser le cadre trop limité des situations habituelles de vie.

Prenons l'exemple des structures additives, on peut identifier six relations de base, à partir desquelles il est possible d'engendrer tous les problèmes d'addition et de soustraction de l'arithmétique ordinaire (Vergnaud, 1981).

RELATIONS ADDITIVES DE BASE

I. La composition de deux mesures en une troisième
II. La transformation (quantifiée) d'une mesure initiale en une mesure finale
III. La relation (quantifiée) de comparaison entre deux mesures
IV. La composition de deux transformations
V. La transformation d'une relation
VI. La composition de deux relations




□ mesure
○ transformation ou relation (positive ou négative)

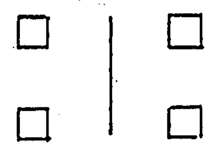
Cette classification n'est pas sortie toute armée du cerveau d'un mathématicien. Elle résulte de considérations psychologiques autant que mathématiques:
— difficulté très inégale de problèmes de structures différentes se résolvant pourtant par la même opération numérique;
— décalage ontogénétique de la réussite aux différentes classes de problèmes qu'on peut engendrer à partir d'une même relation; décalage ontogénétique des procédures utilisées, ainsi que des symbolisations mathématiques accessibles à l'enfant;



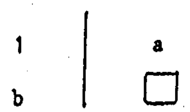
— importance des concepts de transformation temporelle et de relation dans le processus d'appropriation des situations d'addition et de soustraction. La prise en considération de ces concepts a de grandes conséquences théoriques: elle conduit d'une part à introduire, à côté du modèle de la loi binaire interne, celui de l'opération unaire externe, d'autre part à recourir aux nombres relatifs pour caractériser certaines opérations de pensée des jeunes enfants.

Ce n'est pas le lieu de rappeler ici les différentes classes de problèmes que permettent d'engendrer ces relations de base, d'autant que chacune des classes de problèmes ainsi définies peut elle-même être subdivisée en sous-classes, en fonction des valeurs numériques utilisées et du domaine d'expérience auquel il est fait référence: à 8 ans on ne saisit pas de la même manière la transformation d'une quantité de billes, d'une somme d'argent, d'une masse, d'un volume ou d'une position.

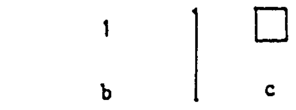
Il n'est pas superflu, par contre, de remarquer que l'analyse des structures multiplicatives est profondément différente de celle des structures additives. Les relations de base les plus simples ne sont pas ternaires mais quaternaires, parce que les problèmes les plus simples de multiplication et de division impliquent la proportion simple de deux variables l'une par rapport à l'autre.



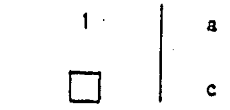
Cette relation permet en effet de générer quatre classes de problèmes élémentaires:



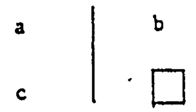

la multiplication




la division-partition



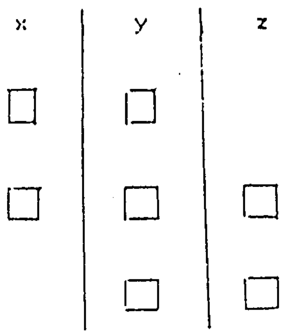

la division quotition




la quatrième proportionnelle

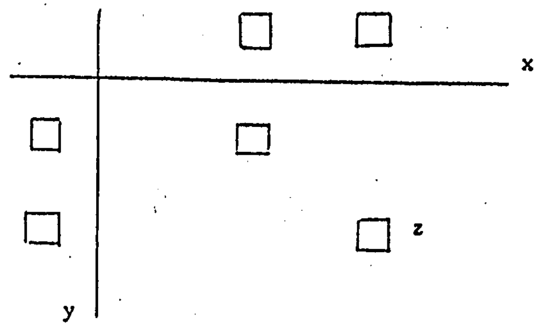
Ces problèmes présentent des difficultés très inégales selon les valeurs numériques (difficulté de la multiplication et de la division par un décimal, surtout par un décimal plus petit que 1), et selon le domaine d'expérience auquel il est fait référence (on ne fait pas fonctionner le modèle de la proportionnalité sur l'homothétie et sur la masse volumique, comme on le fait fonctionner sur le prix d'objets familiers ou sur le partage égalitaire de bonbons entre des enfants).

En deuxième lieu, la combinaison de deux proportions ne pose pas les mêmes problèmes cognitifs si la combinaison se fait par enchaînement des fonctions qui lient les variables deux à deux: x proportionnelle à y, y proportionnelle à z

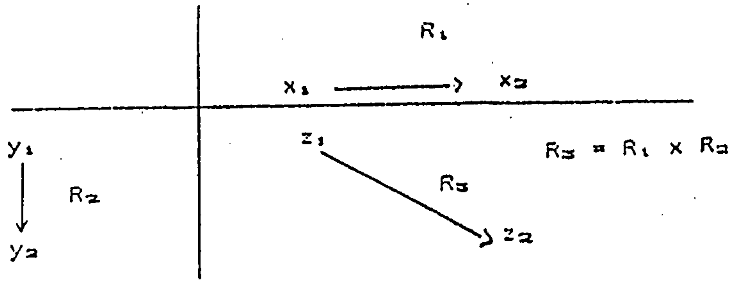



ou si elle se fait par produit: z proportionnelle à x, et à y; x et y indépendantes entre elles. Il s'agit alors d'une structure de proportion double.






On ne soulignera jamais assez l'extrême importance épistémologique de la proportion double (et multiple) pour la géométrie, la physique, les probabilités et les statistiques: beaucoup de questions seraient mieux enseignées si leur statut était mieux reconnu. Or les élèves n'en comprennent que faiblement les tenants et aboutissants: d'un côté parce qu'elles sont conceptuellement plus difficiles, de l'autre parce qu'elles mettent en jeu de nombreux éléments à la fois: six grandeurs et trois rapports pour la proportion double, sans compter les fonctions et les rapports intermédiaires envisageables.




Comme ces grandeurs et ces rapports peuvent être des nombres entiers simples, des entiers quelconques, des fractions, des décimaux plus grands ou plus petits que un, il existe une diversité extraordinaire de cas de figures, dont la difficulté pour les élèves est très variable. Cette diversité de cas peut cependant être assez aisément hiérarchisée en considérant les trois grands facteurs de la complexité cognitive: la structure des problèmes, les valeurs numériques, et les domaines d'expérience.

Sont très variables également les procédures utilisées par les élèves: plus de vingt catégories de tentatives, réussies ou échouées, pour la recherche de la quatrième proportionnelle par exemple.

conceitos e situações, o caso das proporções

Enfin il faut remarquer que les concepts de fraction, de quotient, de nombre rationnel, de produit et de quotient de dimensions, de scalaire, de fonction linéaire et n-linéaire, de combinaison et d'application linéaire, prennent primitivement leur sens dans les problèmes de proportion, et se développent comme outils de pensée à travers la maîtrise progressive de ces situations, bien avant de pouvoir être introduits et traités comme des objets mathématiques.

La classification des situations résulte à la fois de considérations mathématiques et de considérations psychologiques. Certaines distinctions ne sont intéressantes que parce qu'elles entraînent des différences significatives dans la manière dont les élèves s'y prennent pour traiter les situations ainsi différenciées; le mathématicien lui-même n'y prend plus garde et, si l'on s'en tenait aux mathématiques constituées, on négligerait des distinctions qui sont importantes pour la didactique. Pourtant une classification qui n'aurait pas de sens mathématique serait irrecevable. L'une des gageures que doit tenir le psychologue qui s'intéresse à l'apprentissage des mathématiques est d'établir des classifications, décrire des procédures, formuler des connaissances-en-acte, analyser la structure et la fonction des énonciations et des représentations symboliques, dans des termes qui aient un sens mathématique. La spécificité des apprentissages mathématiques est dans les mathématiques elles-mêmes. Cela ne signifie pas que la théorie de l'apprentissage des mathématiques soit tout entière contenue dans les mathématiques.

Parmi les champs conceptuels évoqués plus haut, les structures additives et les structures multiplicatives ont une place un peu privilégiée aujourd'hui, parce que la classification des relations élémentaires et des classes de problèmes élémentaires y est relativement avancée et reconnue dans la communauté des chercheurs. On n'en est pas encore là pour la logique des classes, la géométrie, ou l'algèbre élémentaire. Il existe cependant des critères qui devraient permettre d'avancer rapidement.

Avant de passer à la dernière partie de ce texte, il n'est pas superflu de clarifier le mieux possible la nature des relations



qu'entretient cette vision des situations avec la théorie des situations didactiques telle qu'elle a pris forme dans la communauté française, à partir des travaux de Guy Brousseau.

Une situation didactique est d'abord une mise en scène intéressante et riche. Les relations élémentaires distinguées ici et les classes de problèmes qu'elles permettent d'engendrer ne présentent, telles quelles, qu'un intérêt didactique modéré, justement parce qu'elles sont trop élémentaires. Ce sont d'abord des instruments pour l'analyse des situations et pour l'analyse des difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves. Toute situation complexe est une combinaison de relations élémentaires, et on ne peut pas contourner l'analyse des tâches cognitives que ces relations permettent de générer; mais l'organisation d'une situation didactique en un projet collectif de recherche pour la classe suppose la considération à la fois des fonctions épistémologiques d'un concept, de la signification sociale des domaines d'expérience auxquels il est fait référence, des jeux de rôle entre les acteurs de la situation didactique, des ressorts du jeu, du contrat et de la transposition. La thèse sous-jacente à la théorie des champs conceptuels, cependant, est qu'une bonne mise en scène didactique s'appuie nécessairement sur la connaissance de la difficulté relative des tâches cognitives, des obstacles habituellement rencontrés, du répertoire des procédures disponibles, et des représentations possibles. La psychologie cognitive est essentielle.

toda situação complexa é uma combinação de relações elementares

a t.c.c. e a didática

A côté de l'idée de diversité, j'ai également souligné l'idée d'histoire comme une idée essentielle de mon propos. Il ne s'agit pas de l'histoire des mathématiques mais de l'histoire de l'apprentissage des mathématiques. Cette histoire est individuelle. Pourtant on peut repérer des régularités impressionnantes d'un enfant à l'autre, dans la manière dont ils abordent et traitent une même situation, dans les conceptions primitives qu'ils se forment des objets, de leurs propriétés et de leurs relations, et dans les étapes par lesquelles ils passent. Ces étapes ne sont pas totalement ordonnées; elles n'obéissent pas à un calendrier étroit; les régularités portent sur des distributions de procédures et ne sont pas univoquement déterminées. Mais l'ensemble forme cependant un tout cohérent pour un champ conceptuel donné; on peut notamment repérer les principales filiations et les principales ruptures, ce qui constitue la justification principale de la théorie des champs conceptuels.

história individual de aprendizagem

justificativa principal da t.c.c.

## SIGNIFIÉS ET SIGNIFIANTS

as situações é que dão sentido aos conceitos, mas o sentido não está nas situações em si

Ce sont les situations qui donnent du sens aux concepts mathématiques, mais le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes. Il n'est pas non plus dans les mots et les symboles mathématiques. Pourtant on dit qu'une représentation symbolique, qu'un mot ou qu'un énoncé mathématique ont du sens, ou plusieurs sens, ou pas de sens pour tels ou tels individus; on dit aussi qu'une situation a du sens ou n'en a pas. Alors qu'est-ce que le sens?

sentido!

Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu. Les schèmes, c'est-à-dire les conduites et leur organisation. Le sens de l'addition pour un sujet individuel c'est l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour traiter des situations auxquelles il lui arrive d'être confronté, et qui impliquent l'idée d'addition, c'est aussi l'ensemble des schèmes qu'il peut mettre en œuvre pour opérer sur les symboles, numériques, algébriques, graphiques et langagiers qui représentent l'addition.

Une situation donnée ou un symbolisme particulier n'évoquent pas chez un individu tous les schèmes disponibles. Le sens d'une situation particulière d'addition n'est donc pas le sens de l'addition; le sens d'un symbole particulier non plus. Quand on dit que tel mot a tel sens, on renvoie en fait à un sous-ensemble de schèmes, opérant ainsi une restriction dans l'ensemble des schèmes possibles.

La question se pose pourtant de la fonction des signifiants dans la pensée, et de la nature des schèmes qui organisent le traitement des signifiants, en compréhension et en production. Quelles fonctions cognitives faut-il attribuer au langage, et aux représentations symboliques, dans l'activité mathématique?

On considère à juste titre que les mathématiques forment un corps de connaissances qui répond à des problèmes pratiques et théoriques que s'est posé l'humanité au cours de son histoire; mais on ne répond ainsi que partiellement à la question «qu'est-ce que les mathématiques?» puisque les signifiants et l'organisation du discours y jouent un rôle essentiel. C'est donc un travail théorique et empirique indispensable que de clarifier



la fonction du langage et des autres signifiants. Dans la théorie des champs conceptuels, cette fonction est triple:

linguagem

— aide à la désignation et donc à l'identification des invariants: objets, propriétés, relations, théorèmes;
— aide au raisonnement et à l'inférence;
— aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification, et au contrôle de l'action.

Un schème est, comme nous l'avons vu, une totalité organisée, qui permet de générer une classe de conduites différentes en fonction des caractéristiques particulières de chacune des situations de la classe à laquelle il s'adresse. Cela n'est possible que parce que le schème comporte:

— des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation, et la prise d'information sur la situation à traiter;
— des anticipations du but à atteindre, des effets à attendre et des étapes intermédiaires éventuelles;
— des règles d'action de type si... alors... qui permettent de générer la suite des actions du sujet;
— des inférences (ou raisonnements) qui permettent de «calculer» les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet.

invariantes operatórios

ingredientes de um esquema

Il est classique de dire que le langage a une double fonction de communication et de représentation. Mais on peut ainsi sous-estimer sa fonction d'aide à la pensée, qui n'est que partiellement couverte par les fonctions de représentation et de communication. Certes la désignation et l'identification des invariants relève bien de la fonction de représentation; mais il n'est pas sûr que l'accompagnement par le langage d'une activité manuelle ou d'un raisonnement relève seulement de la fonction de représentation.

linguagem

En effet, ce n'est pas dans n'importe quelles circonstances qu'un individu accompagne son action d'une activité langagière, mais plutôt quand il a besoin de planifier et de contrôler une suite d'actions insuffisamment maîtrisée. Une activité automatisée ne s'accompagne guère de paroles, même à voix basse: les enfants qui, à 9 ans, ont parfaitement saisi comment on calcule un état initial connaissant l'état final et la transformation, ne parlent guère. Ceux pour lesquels c'est encore un problème sont beaucoup plus prolixes (Morange, thèse en cours). On peut évoquer encore l'exemple de l'apprentissage des manœuvres de mise en route d'une voiture: un débutant verbalise volontiers ce qu'il fait ou ce qu'il va faire; quelques semaines plus tard il n'en a plus besoin. L'activité langagière favorise évidemment l'accomplissement de la tâche et la résolution du problème rencontré; sans quoi elle n'interviendrait pas. Tout se passe comme si l'activité langagière favorisait la découverte des relations pertinentes, l'organisation temporelle de l'action et son contrôle. On est ainsi renvoyé à la fonction de représentation du langage, mais cette fonction est triple:

— représentation des éléments pertinents de la situation,
— représentation de l'action,
— représentation des relations entre l'action et la situation.

Le langage représente différents ordres de choses, et l'activité langagière a plusieurs fonctions.

Centrons notre attention sur les informations pertinentes et les opérations de pensée, puisqu'elles forment le canevas de l'activité intellectuelle:

— les informations pertinentes sont exprimées en termes d'objets (arguments), de propriétés et de relations (fonctions propositionnelles), de théorèmes (propositions).
— les opérations de pensée en termes de sélection des informations, d'inférence, d'acceptation ou de refus des conséquences, et aussi en termes d'annonce des opérations à faire, des résultats ou des buts à atteindre, de décomposition en étapes des processus de traitement: «je fais ceci, et puis cela, alors j'aurai ça, etc.»

L'activité langagière exprime aussi d'autres aspects importants, comme l'implication du sujet dans la tâche ou dans le jugement émis, ses sentiments, son estimation de la plausibilité d'une hypothèse ou d'une conclusion, ou encore la relation de ces éléments entre eux. Je n'aborderai ici que le problème de l'expression et de la symbolisation des concepts, des théorèmes, et des objets, en analysant avec un certain détail l'exemple de la recherche d'un état initial lorsque la transformation est négative.

«Mélanie vient d'acheter un gâteau chez le pâtissier. Elle l'a payé 8 francs. Elle compte ce qui lui reste dans son porte-monnaie et trouve 7 francs. Elle se demande si elle n'a pas perdu de l'argent et elle cherche combien elle avait avant d'acheter ce gâteau?»



Considérons d'abord quelques écritures et diagrammes possibles:

a) $7 + 8 = \boxed{\phantom{0}}$

b) $\boxed{7} \xrightarrow{+8} \boxed{\phantom{0}}$

c) $8 + 7 = \boxed{\phantom{0}}$

d)


Toutes ces formes sont acceptables, même si elles sont inégalement observées. En même temps elles sont peu utiles puisqu'elles représentent la solution du problème et non le problème: le choix de l'opération d'addition est nécessairement effectué avant que l'équation ou le diagramme soit écrit, même si le résultat de l'opération numérique n'est pas encore calculé. L'intérêt de ces écritures ne peut résider que dans les contributions qu'elles apportent éventuellement à l'objectivation de la relation entre la solution et les données numériques, non pas de la relation entre la résolution et le problème.

Si l'on essaye de représenter le problème, on n'a plus guère le choix qu'entre deux symbolisations:

e) $\boxed{\phantom{0}} - 8 = 7$

f) $\boxed{\phantom{0}} \xrightarrow{-8} \boxed{7}$

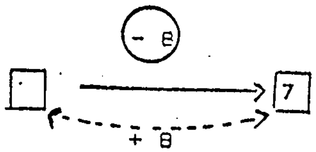
Il n'existe pas en effet de possibilité de représenter le problème avec les diagrammes utilisés en d): ils ne permettent de symboliser que des grandeurs positives, pas des transformations négatives.

Si enfin on a l'ambition de représenter le passage de la représentation du problème à la représentation de la solution, alors la symbolisation e) conduit soit à faire de l'algèbre

$$\square - 8 = 7$$
$$\square - 8 + 8 = 7 + 8$$
$$\square = 7 + 8$$

soit à deviner la valeur du carré blanc dans $\square - 8 = 7$. Ce jeu de devinette n'est guère souhaitable, en tous cas il n'est pas généralisable à de plus grands nombres: $\square - 155 = 87$

Comme on ne peut guère envisager d'enseigner à des enfants de 7 ans le chemin algébrique qui permet de passer du problème $\square - 8 = 7$ à la solution $\square = 7 + 8$, il faut soit abandonner toute idée de représentation symbolique de ce cheminement, soit se rallier à la seule représentation accessible à cet âge




en mettant alors en évidence la réciprocité de l'addition et de la soustraction comme opérations unaires.

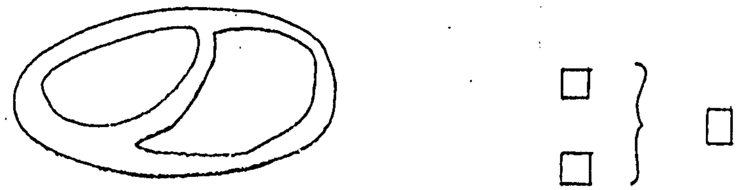
Abandonner l'ambition de représenter symboliquement les transformations et les relations négatives, conduirait inévitablement, si l'enseignant et les manuels continuaient à utiliser des représentations symboliques pour les autres objets mathématiques, à exclure de l'enseignement les situations qui mettent en jeu des transformations et relations négatives, notamment lorsqu'il y a plusieurs transformations successives: plusieurs achats, plusieurs parties de billes, plusieurs entrées et sorties d'un stock, etc. Or les représentations symboliques ont justement l'avantage d'apporter une aide à la résolution de problème lorsque les données sont assez nombreuses et lorsque la réponse à la question posée demande plusieurs étapes. Exclure les transformations et les relations négatives conduirait à un appauvrissement déplorable de l'enseignement des mathématiques.

En outre les représentations symboliques n'ont pas qu'une fonction d'aide à la résolution de problèmes complexes; elles

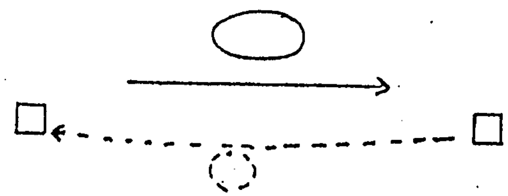


sont aussi des moyens d'identifier plus clairement des objets mathématiques décisifs pour la conceptualisation. Dans le cas des structures additives:

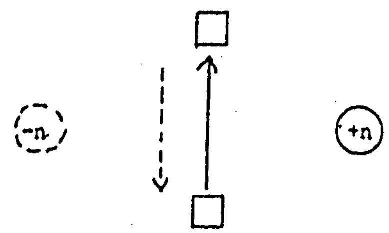
— les relations partie-partie-tout;



— les relations état initial-transformation-état final et la réciprocité des opérations d'addition et de soustraction;



— les relations référé-relation de comparaison-référent et la réciprocité des relations quantifiées «n de plus que» et «n de moins que»;




— la distinction entre les mesures (jamais négatives) représentées par des carrés, et les transformations ou relations (positives ou négatives) représentées par des ronds, et à l'intérieur desquels le nombre est toujours précédé d'un signe positif ou négatif.

Si l'enseignant et l'élève ne disposent pas de ces symboles, ils sont conduits à recourir à des formes variées du langage naturel: des verbes pour les transformations (gagner, perdre, consommer), des formes comparatives pour les relations (avoir n... de plus que), des formes attributives pour les états et les mesures (avoir n bonbons, mesurer x mètres), conjuguées à l'imparfait, au présent, au futur; ils peuvent aussi utiliser des adverbes (maintenant, après, avant) etc.

Tout cet appareillage langagier est excellent pour véhiculer l'information, aussi bien dans l'expression de la solution ou dans les verbalisations qui accompagnent le raisonnement, que dans l'énoncé du problème lui-même. Mais de telles formes linguistiques s'analysent comme des outils de pensée, non pas comme des objets de pensée. Si la conceptualisation mathématique ne se borne pas à la compréhension des relations et des propriétés comme outils, mais recouvre aussi la transformation de ces outils en objets de pensée (Douady, 1986), alors on ne peut rester indifférent aux moyens dont disposent l'enseignant et l'élève pour cette transformation. Dans l'apprentissage de la rationalité scientifique, le métacognitif fait partie du cognitif.

On peut parler d'un état initial de plusieurs manières:
— en utilisant l'imparfait et une proposition subordonnée: «Combien Mélanie avait-elle avant d'acheter ce gâteau?»
— en désignant cet état par un pronom, un complément et un adverbe: «ce qu'elle avait avant»;
— en parlant expressément d'«état initial», ou encore de «point de départ» etc.

Il existe donc dans le langage naturel des moyens de transformer les concepts-outils en concepts-objets, notamment la nominalisation. Toutefois le symbolisme des diagrammes avec carrés, ronds, flèches et accolades est particulièrement efficace pour cette transformation des catégories de pensée en objets de pensée. Pour l'expression des transformations, il n'est pas conceptuellement équivalent d'utiliser le verbe «a payé» au passé, de parler de «la dépense» (nominalisation), ou de désigner toute transformation par un signe unique $\xrightarrow{O}$. L'invariance du signifiant contribue à la meilleure identification du signifié et à sa transformation en objet de pensée.

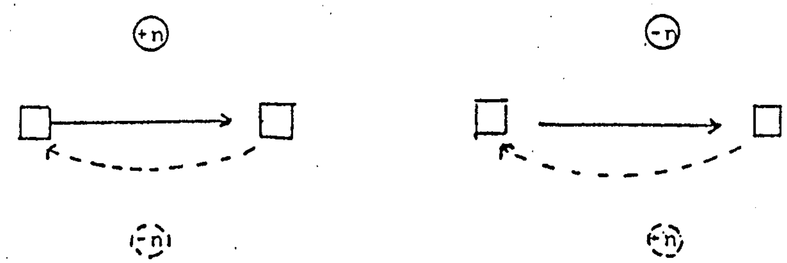
Il est également possible de représenter le même théorème de plusieurs manières, par exemple:

a) l'état initial, c'est l'état final auquel on rajoute ce qu'on a dépensé ou perdu, et dont on soustrait ce qu'on a reçu ou gagné;

b) $F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$



c)




On voit aisément que ces formes ne sont pas équivalentes pour les élèves: la seconde forme est hors de la portée des élèves du cours élémentaire: la première n'a pas le laconisme et l'économie de la troisième. La pertinence du symbolisme et du langage est relative aux connaissances et au développement cognitif de l'élève.

Empruntons un dernier exemple aux structures multiplicatives avec la formule du volume du prisme droit, le volume est le produit de l'aire de base par la hauteur: $V = A\ H$. Et intéressons-nous à l'une des lectures possibles de cette formule: «le volume est proportionnel à l'aire de base quand la hauteur est constante, et à la hauteur quand l'aire de base est constante».

On sait que cette lecture bilinéaire est rarement faite dans les manuels, bien qu'elle soit conceptuellement essentielle: $V(A.1, H.1) = AH\ V(1, 1)$; le volume du prisme qui a une aire de base A fois plus grande que l'unité d'aire, et une hauteur H fois plus grande que l'unité de longueur, a un volume AH fois plus grand que l'unité de volume construite canoniquement comme le produit de l'unité d'aire par l'unité de longueur.

Comme ce volume $A(1, 1)$ est égal à 1, on en déduit que $V(A, H) = A.H$.

Ce raisonnement tient tout entier dans la dépendance linéaire du volume à l'égard de chacune des variables aire de base et hauteur, indépendantes entre elles.

Dans le tableau de double-proportionnalité, ci-dessous, on peut lire aisément que le volume est proportionnel à l'aire de base quand la hauteur est tenue constante